platform wiskunde nederland

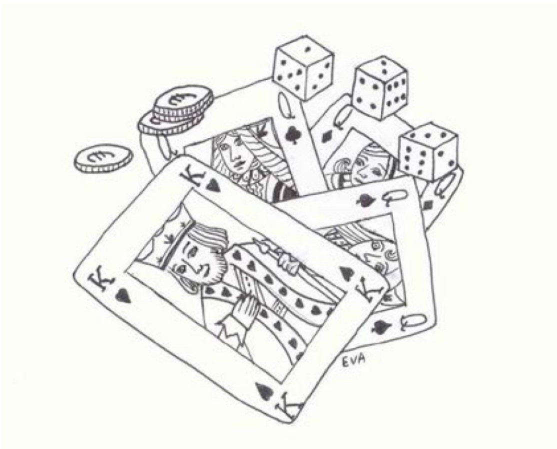
# Speltheorie:

## van strategisch beslissen tot ‘eerlijke’ oplossingen

### Syllabus Vakantiecursus 2020

Amsterdam, 21 en 22 augustus 2020

Eindhoven, 28 en 29 augustus 2020



# Speltheorie:

## van strategisch beslissen tot 'eerlijke' oplossingen

## Syllabus Vakantiecursus 2020

Amsterdam, 21 en 22 augustus 2020

Eindhoven, 28 en 29 augustus 2020

# Programmacommissie

prof. dr. Wil Schilders (PWN, TU/e) (voorzitter)

dr. Jeroen Spandaw (TUD)

drs. Kees Temme (Gymnasium Hilversum, UVA)

dr. Benne de Weger (TU/e) (eindredactie syllabus)

prof. dr. Jan Wiegerinck (UvA)

Website: `http://www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus`

e-mail: `vakantiecursus@platformwiskunde.nl`

Platform Wiskunde Nederland

Science Park 123, 1098 XG Amsterdam

Telefoon: 020-592 4006

# Vakantiecursus 2020

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in HAVO, VWO, HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en wordt georganiseerd door het Platform Wiskunde Nederland. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum Wiskunde en Informatica te Amsterdam, en later ook aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Deze cursus wordt mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), een bijdrage van 4TU.AMI, het toegepaste wiskunde-instituut van de 4 Nederlandse technische universiteiten, en van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Organisatie vindt plaats in nauwe samenwerking met het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) en de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e).

De presentaties van de sprekers zullen zo veel mogelijk beschikbaar komen op de PWN-website: `https://www.platformwiskunde.nl`.

**Met dank aan:**

Ondersteuning PWN:
Sjoukje Talsma.

Ondersteuning TU/e:
Anita Klooster.

# Historie

De eerste vakantiecursus wordt in het jaarverslag 1946 van het Mathematisch Centrum als volgt vermeld:

> *Op 29 en 31 Oct. '46 werd onder auspiciën van het M.C. een druk bezochte en uitstekend geslaagde vacantiecursus gehouden voor wiskundeleeraren in Nederland. Op 29 October stond de wiskunde, op 31 October de didactiek van de wiskunde op de voorgrond. De sprekers waren: Prof.Dr. O. Bottema, "De prismoide", Dr. A. Heyting, "Punten in het oneindige", Mr. J. v. IJzeren, "Abstracte Meetkunde en haar beteekenis voor de Schoolmeetkunde.", Dr. H.D. Kloosterman, "Ontbinding in factoren", Dr. G. Wielenga, "Is wiskunde-onderwijs voor alpha's noodzakelijk?", Dr. J. de Groot, "Het scheppend vermogen van den wiskundige" en Dr. N.L.H. Bunt, "Moeilijkheden van leerlingen bij het beginnend onderwijs in de meetkunde".*
>
> *Aan het einde van de vacantiecursus werden diverse zaken besproken die het wiskunde-onderwijs in Nederland betroffen. Een Commissie werd ingesteld, die het M.C. over de verder te organiseren vakantiecursussen van advies zou dienen. Hierin namen zitting een vertegenwoordiger van de Inspecteurs van het V.H. en M.O. benevens vertegenwoordigers van de lerarenverenigingen Wimecos en Liwenagel.*
>
> *Ook werd naar aanleiding van "wenschen" die tijdens de cursus naar voren gekomen waren ingesteld: "een colloquium over moderne Algebra, een dispuut over de didactiek van de wiskunde, beiden hoofdzakelijk bedoeld voor de leeraren uit Amsterdam en omgeving, terwijl tevens vanwege het M.C. een cursus over Getallenleer werd toegezegd te geven door de heeren v.d. Corput en Koksma. (Colloquium, dispuut en cursus zijn in 1947 gestart en verheugen zich in blijvende belangstelling).*

# Docenten

**dr.ir. Loe Schlicher**
Technische Universiteit Eindhoven, Industrial Engineering and Innovation Sciences
e-mail: `l.p.j.schlicher@tue.nl`

**dr. Ton Storken**
Universiteit Maastricht, Business and Economics
e-mail: `t.storcken@maastrichtuniversity.nl`

**prof.dr. Frank Thuijsman**
Universiteit Maastricht, Data Science and Knowledge Engineering
e-mail: `f.thuijsman@maastrichtuniversity.nl`

# Programma

## Vrijdag 21 augustus 2020 / 28 augustus 2020

| | | |
|---|---|---|
| 15.00–15.30 | | *Ontvangst, koffie* |
| 15.30–15.35 | Schilders | Welkomstwoord |
| 15.35–16.20 | Thuijsman | Inleiding Speltheorie I, Niet-Coöperatieve Spelen (o.a. over het werk van John Von Neumann en John F. Nash) |
| 16.20–16.45 | | *Pauze* |
| 16.45–17:30 | Thuijsman | Inleiding Speltheorie II, Coöperatieve Spelen (o.a. over het werk van Lloyd S. Shapley en Robert J. Aumann) |
| 17.30–18.30 | | *Diner* |
| 18.30–19.15 | Thuijsman | Practicum Speltheorie I |
| 19.15–19.45 | | *Pauze* |
| 19.45–20.30 | Storcken | Inleiding Sociale Keuze Theorie (o.a. over het werk van Kenneth J. Arrow) |

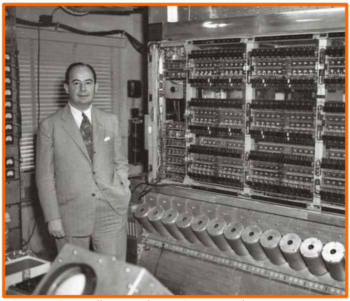
## Zaterdag 22 augustus 2020 / 29 augustus 2020

| | | |
|---|---|---|
| 09.00–10.00 | | *Ontvangst, koffie* |
| 10.00–10.45 | Thuijsman | Practicum Speltheorie II |
| 11.15–12.00 | Thuijsman | Inleiding Speltheorie III, Dynamische Spelen (o.a. over het werk van Lloyd S. Shapley en John Maynard Smith) |
| 12.00–13.00 | | *Lunch* |
| 13.00–13.45 | Thuijsman | Practicum Speltheorie III |
| 13.45–14.30 | Schlicher | Toepassingen van de Speltheorie (o.a. over toepassingen in de zorg, de logistiek en de terrorismebestrijding) |
| 14.30 | | Afsluiting |

Naast deze syllabus wordt ook als studiemateriaal verstrekt:
Frank Thuijsman, "Spelen en Delen – speltheorie, de wiskunde van conflictmodellen", 2e druk, 2017, Zebra-reeks nr. 22, Epsilon Uitgaven.

# 1 Inleiding Speltheorie I, Niet-Coöperatieve Spelen
Frank Thuijsman

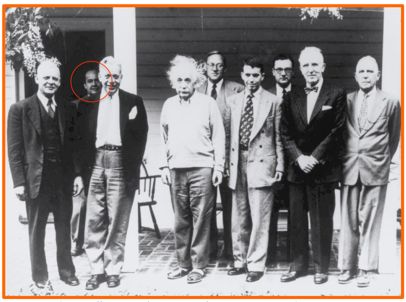
## Deel 1: Niet-Coöperatieve Spelen



*Picture taken from* https://medium.com/luteceo-software-chemistry/can-programming-be-liberated-from-the-von-neumann-style-932ba107402b

Maastricht University

## John von Neumann



*Picture taken from* https://medium.com/cantors-paradise/the-unparalleled-genius-of-john-von-neumann-791bb9f42a2d

Maastricht University

## John von Neumann

November 26, 2014

**Institute Conference on Computation Pays Tribute to Turing, von Neumann**

*POLYMATH MINDS: British mathematician, code-breaker and pioneering computer scientist Alan Turing (1912-1954) (left) was just 41 when he died. Widely considered to be the father of theoretical computer science, he was cited Sunday at a conference on theoretical computation at the Institute for Advanced Study along with the Hungarian-born John von Neumann (1903-1957) who also died at the relatively young age of 53. While the conference speakers focused on current and future challenges, they paid homage to ground-breaking work of their predecessors.*

*Picture taken from* http://www.towntopics.com/wordpress/2014/11/26/institute-conference-on-computation-pays-tribute-to-turing-von-neumann/

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928

Bob

Anna

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 23 | 3 | 45 | 13 |
| 5 | 27 | 4 | -21 | 8 | 0 |
| 1 | -3 | 5 | 7 | 1 | 32 |
| 7 | 5 | -15 | 3 | 8 | 23 |
| -4 | 17 | 3 | 2 | 2 | 4 |
| 20 | -12 | 6 | 3 | 11 | -16 |
| 3 | 25 | 9 | 0 | 5 | -8 |
| 2 | 3 | 5 | 6 | -2 | 0 |
| 6 | 8 | 6 | 33 | -15 | 8 |
| 12 | 9 | 2 | 4 | 23 | 2 |
| 0 | 1 | -3 | 9 | 40 | 16 |
| 5 | 57 | 22 | 2 | 14 | 4 |
| -3 | 4 | 7 | -35 | -17 | 28 |

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928

Matching Pennies

| | Bob | |
|---|---|---|
| 1/2 Anna | **1** | **-1** |
| 1/2 | **-1** | **1** |
| | 0 | 0 |

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928

Ander voorbeeld

Bob

| | | |
|---|---|---|
| Anna | 1 | 3 |
| | 4 | 2 |

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928

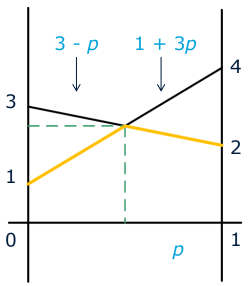
Bob

| | | |
|---|---|---|
| $1 - p$ | 1 | 3 |
| Anna | | |
| $p$ | 4 | 2 |
| | $1 + 3p$ | $3 - p$ |

Anna wil het minimum maximaliseren

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928



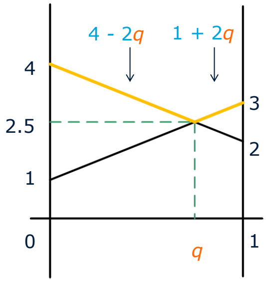

Bob

| | | |
|---|---|---|
| $1 - p$ | 1 | 3 |
| Anna | | |
| $p$ | 4 | 2 |
| | $1 + 3p$ | $3 - p$ |

Anna wil het minimum maximaliseren
met $p$ = 1/2 zorgt Anna ervoor
dat zij minstens 2.5 *ontvangt*

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928




| | $1-q$ | Bob | $q$ | |
|---|---|---|---|---|
| Anna | **1** | | **3** | $1+2q$ |
| | **4** | | **2** | $4-2q$ |

Bob wil het maximum minimaliseren
en zorgt er met $q$ = 3/4 voor
dat hij hoogstens 2.5 *betaalt*

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928

| | 1/4 | Bob | 3/4 |
|---|---|---|---|
| 1/2 Anna | **1** | | **3** |
| 1/2 | **4** | | **2** |

Dit spel heeft **waarde** 2.5.

(1/2, 1/2) en (1/4, 3/4)
zijn **optimale strategieën**.

Maastricht University

## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928

**De MiniMax Stelling**

Iedere eindig matrixspel $A$ heeft een **waarde**, d.w.z.
er bestaat een uniek getal $\boldsymbol{v}$ waarvoor geldt dat

$$\max_x \min_y \ x^{\mathrm{T}}Ay = \boldsymbol{v} = \min_y \max_x \ x^{\mathrm{T}}Ay$$

Er bestaan dus ook optimale strategieën $x^*$ en $y^*$ met
$x^{*\mathrm{T}}Ay \geq \boldsymbol{v}$ voor alle $y$ en $x^{\mathrm{T}}Ay^* \leq \boldsymbol{v}$ voor alle $x$

Maastricht University

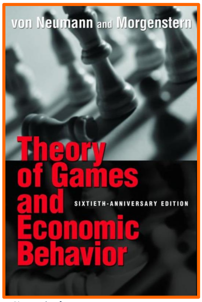
## Zur Theorie der Gesellschaftsspiele - 1928

| Maximaliseer $v$ | Minimaliseer $w$ |
|---|---|
| *zo dat* | *zo dat* |
| $x^{T}Ae_j \geq v$, voor iedere $j$ | $e_i^{T}Ay \leq w$, voor iedere $i$ |
| $x_i \geq 0$, voor iedere $i$ | $y_j \geq 0$ , voor iedere $j$ |
| $\sum_i x_i = 1$ | $\sum_j y_j = 1$ |

De eerste versie van de dualiteitsstelling voor lineair programmeren

Maastricht University

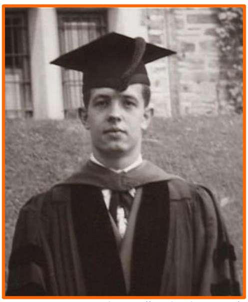
## John von Neumann, Oskar Morgenstern - 1944




*Picture taken from* https://www.bol.com/nl/p/theory-of-games-and-economic-behavior/9200000010151134/

Maastricht University

## John Nash, Lloyd Shapley - 1948/1949



*Pictures taken from* https://www.freeinfosociety.com/article.php?id=101 and from https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2012/shapley/biographical/

Maastricht University

## John Nash - 1949

**Stelling**

Voor ieder einidig ***n***-persoons spel bestaat er een **evenwicht**, d.w.z. dat er een strategieën-combinatie ($s_1$, $s_2$, …, $s_n$) is waarvoor geen enkele speler erop vooruit kan gaan door eenzijdig van strategie te veranderen.

Maastricht University

## John Nash - 1949

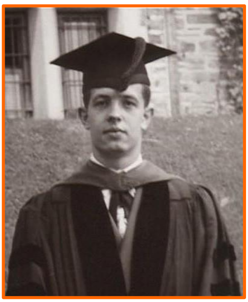
| | | Bob | |
|---|---|---|---|
| 0.5 | Anna | **1,6** | **3,-4** |
| 0.5 | Anna | **4,0** | **2,5** |

Anna krijgt: 2.5 2.5
Bob krijgt: 3 0.5

Instabiel: Bob speelt liever links!

Maastricht University

## John Nash - 1949



| | | Bob | |
|---|---|---|---|
| $1 - p$ | Anna | **1,6** | **3,-4** |
| $p$ | Anna | **4,0** | **2,5** |

Bob krijgt: $6 - 6p$ $-4 + 9p$

Voor $p$ = 2/3 maakt het Bob niets uit.
Zowel Links als Rechts krijgt hij 2.

Maastricht University

## John Nash - 1949

| | $1-q$ | Bob $q$ | Anna krijgt: |
|---|---|---|---|
| Anna | 1,6 | 3,-4 | $1+2q$ |
| | 4,0 | 2,5 | $4-2q$ |

Voor $q$ = 3/4 maakt het Anna niets uit.
Zowel Boven als Onder krijgt zij 2.5.

Maastricht University

## John Nash - 1949

| | 1/4 | Bob 3/4 |
|---|---|---|
| 1/3 Anna | 1,6 | 3,-4 |
| 2/3 | 4,0 | 2,5 |

Voor dit spel is
((1/3, 2/3), (1/4 , 3/4))
een **evenwicht,**
geen van de spelers kan
erop vooruit gaan door
eenzijdig af te wijken.

Maastricht University

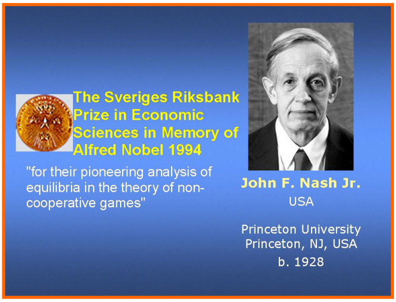
## John Nash - 1949

**Stelling**

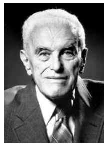
Voor ieder eindig $\boldsymbol{n}$-persoons spel bestaat er een **evenwicht**, een strategieëncombinatie $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ waarbij geen enkele speler zich kan verbeteren door eenzijdig af te wijken.

Maastricht University

## Nobelprijs 1994



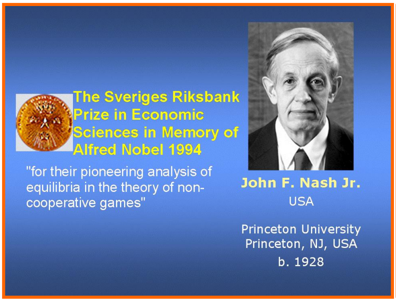

Reinhard Selten



John Harsanyi

Maastricht University

## John Nash - 1994




*EQUILIBRIUM POINTS IN N-PERSON GAMES*

BY JOHN F. NASH, JR.*

PRINCETON UNIVERSITY

Communicated by S. Lefschetz, November 16, 1949

One may define a concept of an $n$-person game in which each player has a finite set of pure strategies and in which a definite set of payments to the $n$ players corresponds to each $n$-tuple of pure strategies, one strategy being taken for each player. For mixed strategies, which are probability distributions over the pure strategies, the pay-off functions are the expectations of the players, thus becoming polylinear forms in the probabilities with which the various players play their various pure strategies.

Any $n$-tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the $n$ strategy spaces of the players. One such $n$-tuple counters another if the strategy of each player in the countering $n$-tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered $n$-tuple. A self-countering $n$-tuple is called an equilibrium point.

The correspondence of each $n$-tuple with its set of countering $n$-tuples gives a one-to-many mapping of the product space into itself. From the definition of countering we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. The closedness is equivalent to saying: if $P_1, P_2, \ldots$ and $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ are sequences of points in the product space where $Q_n \to Q$, $P_n \to P$ and $Q_n$ counters $P_n$ then $Q$ counters $P$.

Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem[1] that the mapping has a fixed point (i.e., point contained in its image). Hence there is an equilibrium point.

In the two-person zero-sum case the "main theorem"[2] and the existence of an equilibrium point are equivalent. In this case any two equilibrium points lead to the same expectations for the players, but this need not occur in general.

* The author is indebted to Dr. David Gale for suggesting the use of Kakutani's theorem to simplify the proof and to the A. E. C. for financial support.

[1] Kakutani, S., *Duke Math. J.*, 8, 457–459 (1941).

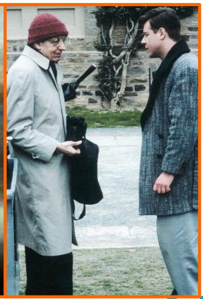
[2] Von Neumann, J., and Morgenstern, O., *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Chap. 3, Princeton University Press, Princeton, 1947.

Maastricht University

## John Nash - 2015


Maastricht University

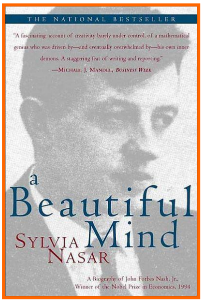
## A Beautiful Mind - 2001

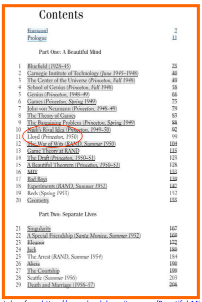



*Pictures taken from* http://krkfilmreviews.blogspot.com/2016/05/a-beautiful-mind-2001.html and from https://www.elmundo.es/enredados/2015/05/25/5562dad946163fc71c8b456d.html

Maastricht University

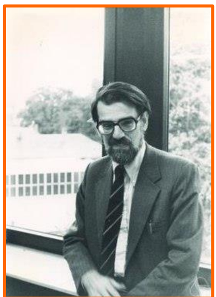

## A Beautiful Mind - 1998



Contents





*Pictures taken from* https://www.bookdepository.com/Beautiful-Mind-Sylvia-Nasar/9780684853703 and https://nl.wikipedia.org/wiki/Lloyd_Shapley

Maastricht University

## Citaten uit A Beautiful Mind

Lloyd Shapley, another pioneer of game theory, described Nash as a graduate student in the late 1940s, when he wrote his seminal papers on game theory: “He was immature, he was obnoxious, he was a brat. What redeemed him was a keen, logical, beautiful mind.”

So now you know to whom I owe the title of the biography.

Maastricht University

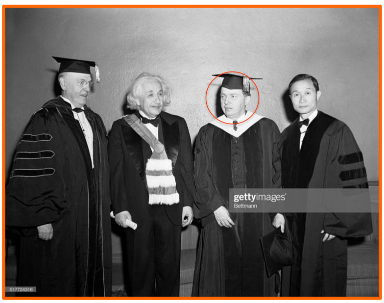
## Citaten uit A Beautiful Mind

A letter from von Neumann dated January 1954 said: “I know Shapley very well and I think he is VERY good.”

He received the Bronze Star for breaking Russian weather codes while serving in the US air force in Chengdu, China

Maastricht University

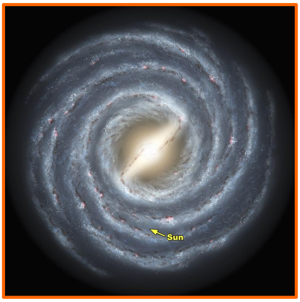
## Harlow Shapley




*Picture taken from* https://www.gettyimages.be/detail/nieuwsfoto%27s/nine-american-scientists-and-one-chinese-scholar-were-nieuwsfotos/517724316

Maastricht University

## Harlow Shapley: onze positie in de Melkweg - 1920

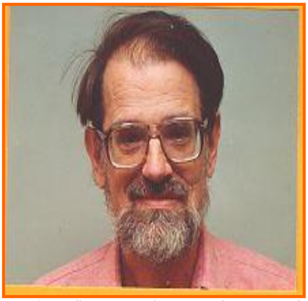



*Picture taken from* https://www.universetoday.com/18256/where-is-the-sun/

Maastricht University

# 2 Inleiding Speltheorie II, Coöperatieve Spelen Frank Thuijsman

## Deel 2: Coöperatieve Spelen



*Picture taken from* https://news.stonybrook.edu/awards-and-honors/shapley-nobel-prize-2/

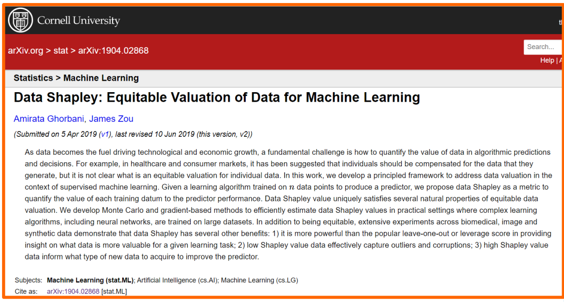
Maastricht University

## Lloyd Shapley - 1953

**Lloyd S. Shapley**, 1953, "A value for *n*-person games." *Contributions to the Theory of Games* 2.28: 307-317.

Maastricht University

## Shapley-waarde in AI


Cornell University

arXiv.org > stat > arXiv:1904.02868

Search...

Help |

Statistics > Machine Learning

**Data Shapley: Equitable Valuation of Data for Machine Learning**

Amirata Ghorbani, James Zou

(Submitted on 5 Apr 2019 (v1), last revised 10 Jun 2019 (this version, v2))

As data becomes the fuel driving technological and economic growth, a fundamental challenge is how to quantify the value of data in algorithmic predictions and decisions. For example, in healthcare and consumer markets, it has been suggested that individuals should be compensated for the data that they generate, but it is not clear what is an equitable valuation for individual data. In this work, we develop a principled framework to address data valuation in the context of supervised machine learning. Given a learning algorithm trained on $n$ data points to produce a predictor, we propose data Shapley as a metric to quantify the value of each training datum to the predictor performance. Data Shapley value uniquely satisfies several natural properties of equitable data valuation. We develop Monte Carlo and gradient-based methods to efficiently estimate data Shapley values in practical settings where complex learning algorithms, including neural networks, are trained on large datasets. In addition to being equitable, extensive experiments across biomedical, image and synthetic data demonstrate that data Shapley has several other benefits: 1) it is more powerful than the popular leave-one-out or leverage score in providing insight on what data is more valuable for a given learning task; 2) low Shapley value data effectively capture outliers and corruptions; 3) high Shapley value data inform what type of new data to acquire to improve the predictor.

Subjects: **Machine Learning (stat.ML)**; Artificial Intelligence (cs.AI); Machine Learning (cs.LG)

Cite as: arXiv:1904.02868 [stat.ML]

*Screenshot taken from* https://arxiv.org/abs/1904.02868

Maastricht University

## Coöperatieve Spelen

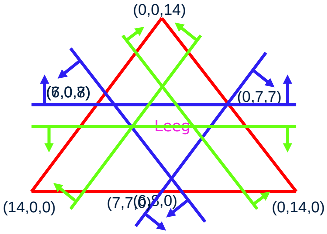
| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 6 | 7 | 7 | 9 | 11 | 11 | 14 |

Eerlijk delen van kosten of opbrengsten in het licht van de waarde van elk van de mogelijke coalities

Maastricht University

## Coöperatieve Spelen

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 6 | 7 | 7 | 9 | 11 | 11 | 14 |




Maastricht University

## Een Waarde voor *n*-Persoons Spelen

Voor coöperatieve spelen is er slechts één oplossingsmechanisme met de eigenschappen:

- Anonimiteit
- Efficiëntie
- Dummy
- Additiviteit

Dit mechanisme, de Shapley-waarde, geeft elke speler het gemiddelde van zijn marginale bijdragen.

Maastricht University

## De Shapley-waarde $\Phi$

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 6 | 7 | 7 | 9 | 11 | 11 | 14 |

Marginale bijdragen

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **A-B-C** | 6 | 3 | 5 |
| **A-C-B** | 6 | 3 | 5 |
| **B-A-C** | 2 | 7 | 5 |
| **B-C-A** | 3 | 7 | 4 |
| **C-A-B** | 4 | 3 | 7 |
| **C-B-A** | 3 | 4 | 7 |
| **Som:** | 24 | 27 | 33 |
| **$\Phi$:** | 4 | 4.5 | 5.5 |

Maastricht University

## Een andere Waarde voor *n*-Persoons Spelen

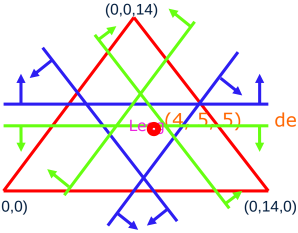
David Schmeidler

The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17, 1969

Maastricht University

## De Nucleolus

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 6 | 7 | 7 | 9 | 11 | 11 | 14 |




$\Phi$ = (4, 4.5, 5.5) de nucleolus

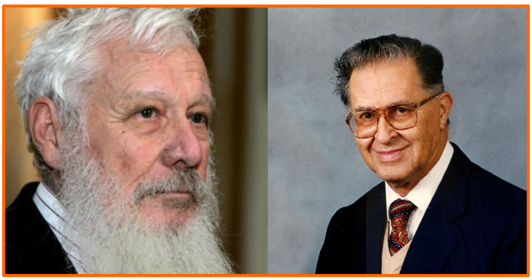
Maastricht University

## Nobelprijs 2005

Thomas Schelling Bob Aumann

Maastricht University

Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud, *Journal of Economic Theory* 36, 1985



Bob Aumann Michael Maschler

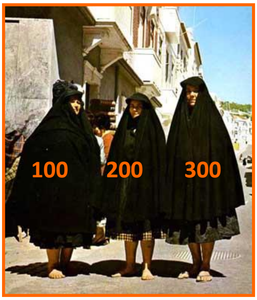
Maastricht University

A problem of rights arbitration from the Talmud,
*Mathematical Social Sciences* 2, 1982

Barry O'Neill

Maastricht University

## Drie Weduwen *van één Man*




Maastricht University

## Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Kethuboth, Fol. 93a, Babylonian Talmud, Epstein, ed, 1935

"If a man who was married to three wives died and the kethubah of one was 100 zuz, of the other 200 zuz, and of the third 300 zuz, and the estate was worth only 100 zuz, then the sum is divided equally.

If the estate was worth 200 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimants respectively of the 200 and the 300 zuz receive each 75 zuz.

If the estate was worth 300 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimant of the 200 zuz receives 100 zuz while the claimant of the 300 zuz receives 150 zuz.

Similarly if three persons contributed to a joint fund and they had made a loss or a profit then they share in the same manner."

Maastricht University

## Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

| | | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| Weduwe | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |
| | | Gelijk | ??? | Proportioneel |

Maastricht University

## Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Kethuboth, Fol. 93a, Babylonian Talmud, Epstein, ed, 1935

"If a man who was married to three wives died and the kethubah of one was 100 zuz, of the other 200 zuz, and of the third 300 zuz, and the estate was worth only 100 zuz, then the sum is divided equally.

If the estate was worth 200 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimants respectively of the 200 and the 300 zuz receive each 75 zuz.

If the estate was worth 300 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimant of the 200 zuz receives 100 zuz while the claimant of the 300 zuz receives 150 zuz.

Similarly if three persons contributed to a joint fund and they had made a loss or a profit then they share in the same manner."

Maastricht University

## Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

| | | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| Weduwe | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |
| | | Gelijk | ??? | Proportioneel |

"Andere bedragen op dezelfde manier." ?????

Hoe moet je 400 verdelen?

Wat indien een vierde weduwe 400 zou claimen?

Maastricht University

## Het Talmud Probleem als Coöperatief Spel

| | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| A 100 | | | |
| B 200 | | | |
| C 300 | | | |

De waarde van een coalitie S is het bedrag dat resteert, wanneer we eerst de andere spelers betalen.

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 200 |

Maastricht University

## Het Talmud Probleem als Coöperatief Spel

| | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| A 100 | | | |
| B 200 | | | |
| C 300 | | | |

De waarde van een coalitie S is het bedrag dat resteert, wanneer we eerst de andere spelers betalen.

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |

Maastricht University

## Het Talmud Probleem als Coöperatief Spel

| | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| A 100 | | | |
| B 200 | | | |
| C 300 | | | |

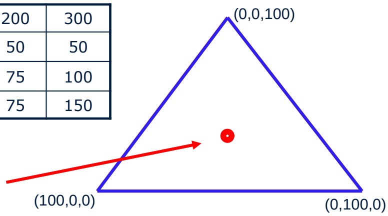
De waarde van een coalitie S is het bedrag dat resteert, wanneer we eerst de andere spelers betalen.

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 200 | 300 |

Maastricht University

## De Talmud Spelen

| | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| A 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| B 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| C 300 | 33.33 | 75 | 150 |



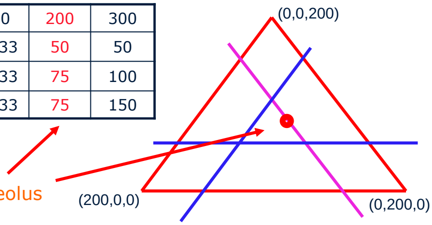

de nucleolus

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |

Maastricht University

## De Talmud Spelen

| | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| A 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| B 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| C 300 | 33.33 | 75 | 150 |



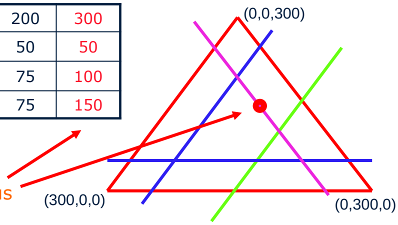

de nucleolus

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 200 |

Maastricht University

## De Talmud Spelen

| | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| A 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| B 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| C 300 | 33.33 | 75 | 150 |




de nucleolus

| S | Ø | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(S) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 200 | 300 |

Maastricht University

## Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

| | | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| Weduwe | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |

Gelijk ??? Proportioneel

"Andere bedragen op dezelfde manier." ?????

Hoe moet je 400 verdelen?

We hoeven dus enkel de nucleolus te berekenen!

Maastricht University

## De Oplossing

Baba Metzia 2a, Fol. 1, Babylonian Talmud, Epstein, ed, 1935

"Two hold a garment;
one claims it all, the other claims half.
Then one gets 3/4 , while the other gets 1/4."

Maastricht University

## Consistentie

Nalatenschap

| | | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| Weduwe | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |

De getallen nader bekeken

Maastricht University

## Consistentie

Nalatenschap

| | | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| Weduwe | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |

Maastricht University

## Consistentie

Nalatenschap

| | | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| Weduwe | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |

Maastricht University

## Consistentie

Nalatenschap

| | | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| Weduwe | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |

Maastricht University

## Consistentie

| | | Nalatenschap | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 100 | 200 | 300 |
| Weduwe | 100 | 33.33 | 50 | 50 |
| | 200 | 33.33 | 75 | 100 |
| | 300 | 33.33 | 75 | 150 |

De vraag blijft:

Hoe verdeel je 400?
Wat als een vierde weduwe 400 eist?

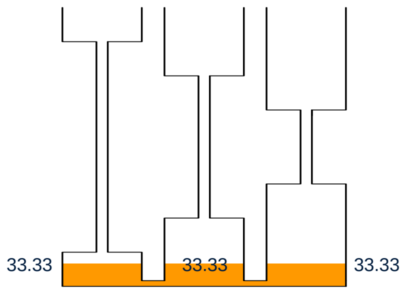
Maastricht University

## Marek M. Kaminski - 2000

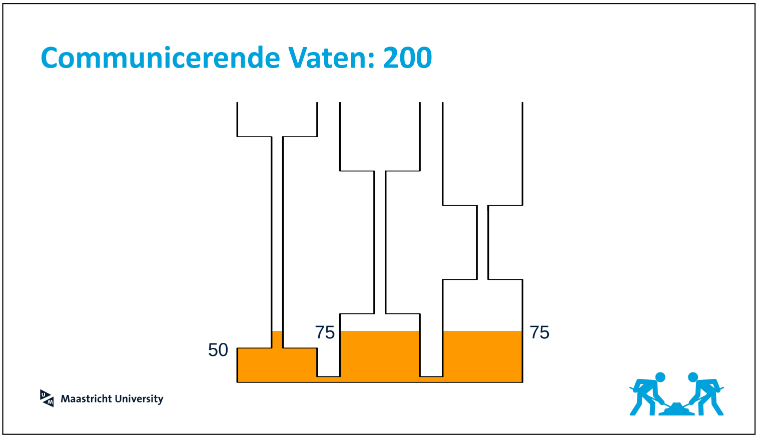
'Hydraulic' rationing, *Mathematical Social Sciences* 40, 2000

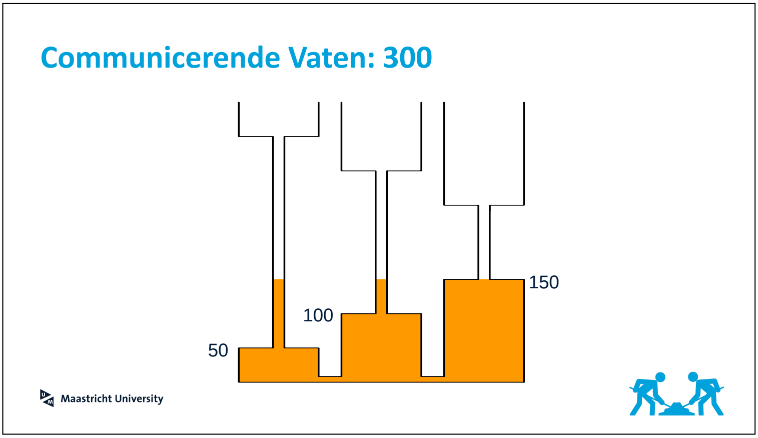
Maastricht University

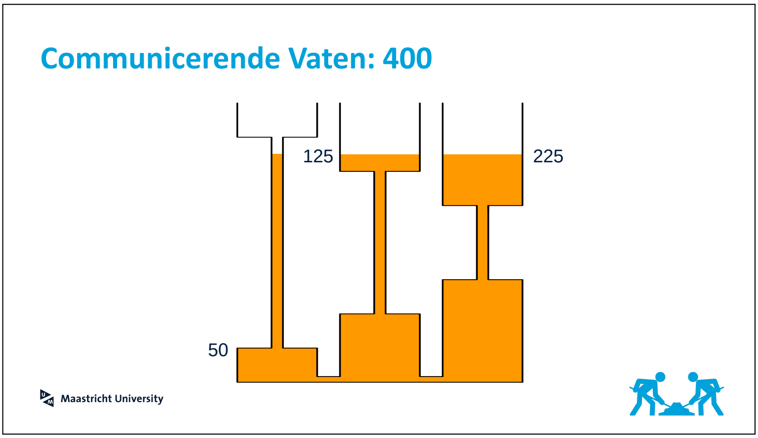
## Communicerende Vaten: 100



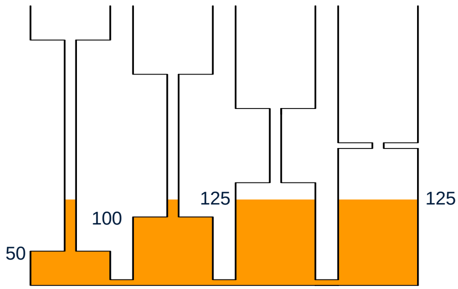

Maastricht University


Communicerende Vaten: 200
75
50
75
Maastricht University


Communicerende Vaten: 300
150
100
50
Maastricht University


Communicerende Vaten: 400
125
225
50
Maastricht University

## Communicerende Vaten: 400 voor 4




Maastricht University

# 3 Een beknopt bewijs van Arrow's Onmogelijkheidsstelling – Ton Storcken

De stelling van Arrow, die we hier bespreken, wordt ook wel een onmogelijkheidsstelling genoemd. Dit omdat deze laat zien dat er geen collectieve beslissingsregels zijn die aan bepaalde normatieve voorwaarden voldoen. Ten minste op voorhand zijn deze voorwaarden plausibel. Vandaar dat deze stelling duidelijk maakt dat we, als wetenschappers, bij modellen over collectieve besluiten voorzichtig moeten zijn met het opleggen van normatieve voorwaarden. Aan gebruikers van bepaalde beslissingsregels, welke dus om logische redenen niet aan al deze normatieve voorwaarden kunnen voldoen, maakt deze stelling duidelijk dat de uitkomsten niet altijd wenselijke zouden kunnen zijn.
In het volgende zal ik Arrow's stelling voor twee agenten (individuen/ mensen/ actors) en drie collectieve alternatieven zo aanschouwelijk mogelijk bewijzen. Desalniettemin zal het bewijs beknopt zijn en bovendien makkelijk uitbreidbaar zijn naar meer agenten en meer alternatieven. Aan het eind zal ik hiertoe enige aanzetten geven. Overigens vormt dit verhaal een vrije vertaling van Peters, H., & Storcken, T. (2019). Arrow for Ad. In E. Rouwette (Ed.), *Decisions, Coalitions and Evidence: Liber Amicorum for Ad van Deemen* Institute for Management Research.

## I Model

We gaan ervan uit dat een aantal agenten, in ons geval twee, over een aantal collectieve alternatieven, in ons geval drie, een gezamenlijke beslissing nemen. We zullen de agenten nummeren: *1* en *2* en de alternatieven aangeven met de letters *a*, *b* en *c*. De agenten hebben voorkeuren over de alternatieven. Deze zijn vastgelegd in een voorkeurrelatie, welke we ook wel aangeven met de letter *R*. Zo'n relatie is een deel van $\{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ en als $(x,y)$ in $R$ zit dan zeggen we dat *x* <u>verkozen wordt boven</u> *y* bij *R.* Een voorbeeld van zo'n voorkeurrelatie is:" *a* is het beste alternatief *b* het op één na beste en c het slechtste". Deze geven we aan met *abc.* Dus *R* = *abc* betekent *R* = {(a,b),(a,c),(b,c)}. Analoog geeft *cab* de voorkeurrelatie aan, waarbij *c* het beste, *a* het op één na beste en *b* het slechtste alternatief is. Er zijn zes van zulke voorkeurrelaties: *abc, acb, cab, cba, bca* en *bac.* Vooralsnog beperken we ons tot strikte voorkeurrelaties: we sluiten indifferenties uit. Ons model zal in eerste instantie geen rekening houden met situaties waarbij agenten indifferent tussen twee of meerdere alternatieven zouden kunnen zijn. Later zal ik eveneens een aanzet geven hoe de stelling van Arrow voor dit soort gevallen te bewijzen is.

Twee belangrijke model aannames zijn 1) dat de voorkeurrelaties van de twee agenten niet van elkaar afhangen en 2) dat de collectieve beslissingsregel niet van tevoren weet wat deze zullen zijn. Een collectieve beslissingsregel zal daarom voor elk van de 36 combinaties van individuele voorkeurrelaties, hierna profielen genoemd, een uitkomst dienen te geven. Zien we zo'n beslissingsregel als een functie, zeg $F$, dan bestaat het domein van deze uit die verzameling van 36 profielen. In het vervolg zullen we profielen met de letters $p$, $q$ en $r$ aangeven. Hierbij is $p(1)$ de voorkeurrelatie van agent *1* en $p(2)$ die van agent *2* in profiel $p$. Als uitkomst van een beslissingsregel nemen we hier een voorkeurrelatie. We spreken dan van een *voorkeurregel*. Er bestaan ook andere 'types' van collectieve beslissingsregels bijvoorbeeld zulke die aan een profiel een alternatief toevoegen. In zo'n geval spreken we van een keuzeregel. Arrow's stelling gaat over voorkeurregels, vandaar dat we ons hier daartoe beperken.

Het voordeel dat we ons beperkt hebben tot twee agenten en drie alternatieven ligt vooral in de weergave mogelijkheid van voorkeurregels. Bekijk hiertoe de volgende tabel.

| *1\ 2* | *abc* | *acb* | *cab* | *cba* | *bca* | *bac* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *abc* | | | | | | |
| *acb* | | | | | | |
| *cab* | | | | | | |
| *cba* | | | | | | |
| *bca* | | | | | | |
| *bac* | | | | | | |

In deze tabel zijn de rijen met de voorkeurrelatie mogelijkheden van agent *1* aangegeven en de kolommen met die van agent *2.* Een cel die hoort bij voorkeurrelatie *acb* voor agent *1* en voorkeurrelatie *bca* bij agent *2* geven we aan met profiel $p = (acb,bca)$. Hierbij is $p(1) = acb$ en $p(2) = bca$. Een voorkeurregel F is dus vastgelegd door in elke cel een voorkeurrelatie te noteren. Er zijn dus $6^{36}$ voorkeurregels.

Bijvoorbeeld $F_{abc}$ is vastgelegd met de volgende tabel

| 1\ 2 | *abc* | *acb* | *cab* | *cba* | *bca* | *bac* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *abc* | *abc* | *abc* | *abc* | *abc* | *abc* | *abc* |
| *acb* | *abc* | *acb* | *acb* | *acb* | *abc* | *abc* |
| *cab* | *abc* | *acb* | *cab* | *cab* | *cab* | *abc* |
| *cba* | *abc* | *acb* | *cab* | *cba* | *bca* | *bac* |
| *bca* | *abc* | *abc* | *cab* | *bca* | *bca* | *bac* |
| *bac* | *abc* | *abc* | *abc* | *bac* | *bac* | *bac* |

In woorden kan deze voorkeurregel als volgt beschreven worden. Behalve voor profielen (*cab,bca*) en (*bca,cab*) wordt in de collectieve uitkomst *a* boven *b* verkozen, tenzij beide agenten *b* boven *a* verkiezen, wordt in de collectieve uitkomst *a* boven *c* verkozen, tenzij beide agenten *c* boven *a* verkiezen en wordt in de collectieve uitkomst *b* boven *c* verkozen, tenzij beide agenten *c* boven *b* verkiezen. Laat de uitkomst bij de twee genoemde profielen *cab* zijn. Grof gezegd is de collectieve voorkeur bij deze regel alfabetisch tenzij beide agenten daar tegen zijn. Een uitzondering vormen de twee genoemde profielen daar dit bij die profielen tot een "cyclische volgorde" zou leiden.

Dit is slechts één van de $6^{36}$ mogelijke voorkeurregels met zijn ¨voor¨ en zijn ¨tegen¨ en al die regels zullen op sommige profielen verschillen. Een natuurlijke vraag is dan ook of er op voorhand regels bestaan die te prefereren zijn boven de rest. Het stellen van (normatieve) condities, waaraan zo'n regel zou moeten voldoen, kan volgens de stelling van Arrow problematisch zijn. De drie (normatieve) condities die Arrow's stelling mogelijk maken zijn de volgende.

**Pareto optimaliteit** voorkeurregel *F* is Pareto optimaal als bij ieder profiel *p* en ieder tweetal verschillende alternatieven, zeg *x* en *y,* alternatief *x* collectief boven *y* verkozen wordt, als alle agenten *i* in hun voorkeurrelatie *p*(*i*) alternatief *x* boven *y* verkiezen.

Veel regels zijn Pareto optimaal zo ook de regel $F_{abc}$. Een constante voorkeurregel, bijvoorbeeld $F_{\text{Constant, } abc}$ welke aan ieder profiel uitkomst *abc* toevoegt, is niet Pareto optimaal.

**Niet-Dictatoriaal** voorkeurregel *F* is niet-dictatoriaal als er voor iedere agent *j* er een profiel *p* is zodanig dat

$$F(p) \neq p(j).$$

Een voorkeurregel $F$ heet dictatoriaal indien er een agent $j$ is zodanig dat voor ieder profiel $p$

$$F(p) = p(j).$$

Wiskundig zouden we een dictatoriale regel een projectie op de j-de coördinaat kunnen noemen. Het spreekt bijna voor zich dat een dictatoriale regel onwenselijk is. In ieder geval is het mathematisch gezien een zeer eenvoudige regel. De voorkeurregel $F_{abc}$ is symmetrisch in zijn argumenten. We noemen deze regel dan ook wel anoniem: het maakt niet uit wie welke voorkeurrelatie heeft. Ten hoogste hoe vaak deze in een profiel voorkomt.

**Onafhankelijk van Irrelevante Alternatieven** (we korten dit af met: IIA, independent of irrelevant alternatives) Een voorkeurregel $F$ is onafhankelijk van irrelevante alternatieven als voor elk tweetal profielen, zeg $p$ en $q$, en elke deelverzameling van de alternatieven, zeg $X$, de uitkomst binnen $X$, alleen afhangt van de profielen binnen $X$, dus

$$p|_X = q|_X \text{ impliceert dat } F(p)|_X = F(q)|_X.$$

Hierbij geeft $p|_X$ de beperking van profiel $p$ tot alternatieven deelverzameling $X$ aan. Deze beperking is coördinaat gewijs:

$$p|_X = (p(1)|_X, p(2)|_X).$$

Bovendien is de beperking van een voorkeurrelatie, zeg $R$, tot $X$ vastgelegd met $R|_X = \{(x,y) \in R\text{: } x \in X \text{ en } y \in X\}$.

Ontegenzeggelijk is IIA de meest beperkende en meest bekritiseerde conditie van de drie genoemde condities. De IIA conditie maakt het mogelijk dat we bij het nemen van collectieve beslissingen alleen de relevante alternatieven hoeven te beschouwen. Stel, bijvoorbeeld, $a$, $b$ en $c$ zijn leerlingen en agenten $1$ en $2$ docenten, die een rangorde van best naar slechtst van deze drie agenten willen opstellen. Alleen als ze een voorkeurregel gebruiken welke aan IIA voldoet, is het zeker dat bij het bepalen van de collectieve volgorde tussen $a$ en $b$ de positie van $c$ in hun individuele voorkeuren geen rol speelt. In het dagelijks leven lossen we veel collectieve beslissingsproblemen op door deze problemen van hun irrelevante zaken te ontdoen. In de tweede kamer heb ik zelden een minister of volksvertegenwoordiger gehoord, die bij een debat over, bijvoorbeeld, defensie, zaken over gezondheidszorg of onderwijs aandroeg. Sterker nog, geagendeerd stemmen, waarbij in stemrondes telkens tussen twee wetsvoorstellen beslist wordt, is mijns inziens alleen te verdedigen op basis van deze IIA conditie.

Zoals gezegd de IIA conditie is erg beperkend. Een dictatoriale voorkeurregel, bijvoorbeeld $F_{\text{dict},1}$, als volgt gedefinieerd voor een willekeurig profiel p

$$F_{\text{dict},1}(p) = p(1),$$

voldoet aan deze conditie. Het is echter een van de weinige regels. De voorkeurregel $F_{abc}$ voldoet daar niet aan. Immers $F_{abc}(cab,bca) = cab$, terwijl

$F_{abc}(cba,bca) = bca$. Dus ofschoon $(cab,bca)|_{\{b,c\}} = (cba,bca)|_{\{b,c\}}$ is $F_{abc}(cab,bca)|_{\{b,c\}} \neq F_{abc}(cba,bca)|_{\{b,c\}}$.

Aangezien de IIA conditie een conditie is welke voorkeurregels op een aangename manier vereenvoudigd, immers ze maakt het mogelijk dat de uitkomst bepaald wordt door paarsgewijze vergelijking, ligt een deel van de kritiek op haar verscholen in het nauwelijks existeren van zulke regels. Dit laatste komt tot uitdrukking in de volgende stelling.

**II Stelling (Arrow)**(twee agenten drie alternatieven) Laat $F$ een Pareto optimale voorkeurregel zijn die aan de conditie van IIA voldoet. Dan is $F$ dictatoriaal.

**Bewijs** Het is voldoende te bewijzen dat $F = F_{\text{dict},1}$ of $F = F_{\text{dict},2}$ . Het bewijs verloopt in 4 stappen.

Een profiel $p$ noemen we een <u>maximaal conflict</u> als er een naamgeving van de alternatieven in $x$, $y$ en $z$ is, zodanig dat $p(1) = xyz$ en $p(2) = zyx$.

Twee verschillende alternatieven $x$ en $y$ noemen we <u>direct opvolgend in voorkeurrelatie</u> $R$ als er niet een van $x$ en $y$ verschillend alternatief $z$ is, zodanig dat

óf $x$ boven $z$ en $z$ boven $y$ verkozen wordt bij $R$,

óf $y$ boven $z$ en $z$ boven $x$ verkozen wordt bij $R$.

Stap 1 Laat $x$, $y$ en $z$ drie alternatieven zijn. Dan zijn $x$ en $y$, zowel als $y$ en $z$ direct opvolgend in $F(xyz,zyx)$.

Bewijs Stap 1

We bewijzen alleen dat $x$ en $y$ direct opvolgend in $F(xyz,zyx)$ zijn. Het bewijs dat $y$ en $z$ direct opvolgend in $F(xyz,zyx)$ zijn volgt namelijk op analoge wijze.

Beschouw profiel $(xyz,zxy)$. Pareto optimaliteit impliceert dat $x$ boven $y$ verkozen wordt in uitkomst $F(xyz,zxy)$. Analoog impliceert Pareto optimaliteit dat $y$ boven $x$ verkozen wordt in uitkomst $F(yxz,zyx)$. Merk op dat voor alternatieven $v \in \{x,y\}$

$$(xyz,zxy)|_{\{v,z\}} = (xyz,zyx)|_{\{v,z\}} = (yxz,zyx)|_{\{v,z\}}.$$

IIA impliceert derhalve

$$F(xyz,zxy)|_{\{v,z\}} = F(xyz,zyx)|_{\{v,z\}} = F(yxz,zyx)|_{\{v,z\}}.$$

Omdat de voorkeur tussen $x$ en $y$ in $F(xyz,zxy)$ verschilt van die tussen $x$ en $y$ in $F(yxz,zyx)$, zal de voorkeur tussen $x$ en $y$ in $F(xyz,zyx)$ verschillen met

of die tussen $x$ en $y$ in $F(xyz,zxy)$

of die tussen $x$ en $y$ in $F(yxz,zyx)$.

Zonder de algemeenheid te schaden, stel het laatste. Dus $x$ wordt boven $y$ verkozen bij $F(xyz,zyx)$ en $y$ wordt boven $x$ verkozen bij $F(yxz,zyx)$. Nu kan niet $x$ boven $z$ en $z$ boven $y$ verkozen worden bij $F(xyz,zyx)$. Immers met $F(xyz,zyx)|_{\{v,z\}} = F(yxz,zyx)|_{\{v,z\}}$ voor $v \in \{x,y\}$, zou dan volgen dat $x$ boven $z$ en $z$ boven $y$ verkozen worden bij

*F*(*yxz*,*zyx*). Met deze laatste twee zou dan volgen dat *x* boven *y* verkozen wordt bij *F*(*yxz*,*zyx*), wat in strijd is met een eerdere aanname. Dus *x* en *y* volgen elkaar direct op in *F*(*xyz*,*zyx*).
Eind bewijs Stap 1

Stap 2 Voor elk maximaal conflict (*xyz*,*zyx*) *F*(*xyz*,*zyx*) = *xyz* of *F*(*xyz*,*zyx*) = *zyx*.

Bewijs Stap 2
Neem een maximaal conflict (*xyz*,*zyx*). Uit Stap 1 volgt dat zowel *x* en *y* als ook *y* en *z* elkaar direct opvolgen in *F*(*xyz*,*zyx*). Dus *F*(*xyz*,*zyx*) = *xyz* of *F*(*xyz*,*zyx*) = *zyx*.
Einde bewijs stap 2

De volgende tabel geeft Stap 2 weer.

| *1\ 2* | *abc* | *acb* | *cab* | *cba* | *bca* | *bac* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *abc* | | | | *abc/ cba* | | |
| *acb* | | | | | *acb/ bca* | |
| *cab* | | | | | | *cab/ bac* |
| *cba* | *cba/ abc* | | | | | |
| *bca* | | *bca/ acb* | | | | |
| *bac* | | | *bac/ cab* | | | |

Stap 3 Voor elk maximaal conflict (*xyz*,*zyx*) *F*(*xyz*,*zyx*) = *xyz*
óf
voor elk maximaal conflict (*xyz*,*zyx*) *F*(*xyz*,*zyx*) = *zyx*.

Bewijs Stap 3
In het licht van Stap 2 mogen we zonder de algemeenheid te schaden aannemen dat *F*(*abc*,*cba*) = *abc*. We bewijzen nu dat *F*(*acb*,*bca*) = *acb*.
Merk op dat voor alternatieven $v \in \{b,c\}$

$$(abc,cba)|_{\{v,a\}} = (acb,bca)|_{\{v,a\}}.$$

IIA impliceert derhalve dat $F(abc,cba)|_{\{v,a\}} = F(acb,bca)|_{\{v,a\}}$ voor $v \in \{b,c\}$. Dus *a* wordt boven *b* en *c* verkozen bij $F(acb,bca)$ omdat dit ook zo bij $F(abc,cba)$ is. Daar met Stap 2 $F(acb,bca) \in \{acb,bca\}$ volgt dat $F(acb,bca) = acb$.

Analoog impliceert $F(acb,bca) = acb$ dat $F(cab,bac) = cab$,
$F(cab,bac) = cab$ dat $F(cba,abc) = cba$,
$F(cba,abc) = cba$ dat $F(bca,acb) = bca$, en tenslotte
$F(bca,acb) = bca$ dat $F(bac,cab) = bac$.

Hiermee is Stap 3 bewezen.
Einde bewijs Stap 3

We hebben dus
óf

| *1\ 2* | *abc* | *acb* | *cab* | *cba* | *bca* | *bac* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *abc* | | | | *abc* | | |
| *acb* | | | | | *acb* | |
| *cab* | | | | | | *cab* |
| *cba* | *cba* | | | | | |
| *bca* | | *acb* | | | | |
| *bac* | | | *cab* | | | |

óf

| *1\ 2* | *abc* | *acb* | *cab* | *cba* | *bca* | *bac* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *abc* | | | | *cba* | | |
| *acb* | | | | | *bca* | |
| *cab* | | | | | | *bac* |
| *cba* | *abc* | | | | | |
| *bca* | | *acb* | | | | |
| *bac* | | | *cab* | | | |

.

## Stap 4 *F* is dictatoriaal.

Bewijs Stap 4
Zonder de algemeenheid te schaden, nemen we aan dat voor elk maximaal conflict $(xyz,zyx)$

$$F(xyz,zyx) = xyz.$$

Laat $p$ een profiel zijn. Het is voldoende te bewijzen dat $F(p) = p(1)$. Neem twee verschillende alternatieven $v$ en $w$. Laat $v$ verkozen worden boven $w$ bij $p(1)$. Het is voldoende te bewijzen dat $v$ verkozen wordt boven $w$ bij $F(p)$. Dit is met Pareto optimaliteit het geval als $v$ verkozen wordt boven $w$ bij $p(2)$. Stel $w$ wordt boven $v$ verkozen bij $p(2)$. Beschouw nu maximaal conflict $(vwu,uwv)$, waarbij $u$ het derde alternatief is. Met Stap 3 volgt $F(vwu,uwv) = vwu$. IIA en $p|_{\{v,w\}} = (vwu,uwv)|_{\{v,w\}}$ impliceren nu dat

$$F(vwu,uwv)|_{\{v,w\}} = F(p)|_{\{v,w\}}.$$

Dus $v$ wordt boven $w$ verkozen bij $F(p)$.
Einde bewijs Stap 4
Einde bewijs van de stelling van Arrow

# Ⅲ Generalisaties

In de vorige sectie is Arrow's stelling voor een heel speciaal geval bewezen: twee agenten en drie alternatieven, waarbij de voorkeurregels geen indifferenties toelaten. We zullen in deze sectie laten zien (middels opgaven) dat deze stelling uit te breiden is naar willekeurig meer alternatieven en agenten. Verder zullen we laten zien dat het toestaan van indifferenties eveneens de aard van de onmogelijkheid niet verandert.

Laten we beginnen met meer alternatieven. Vanaf hier; veronderstel dat het aantal alternatieven $m \geq 3$ is. Laat $A$ de verzameling alternatieven zijn. Voorkeurrelaties zijn nu rijtjes van lengte $m$ van beste, op één na beste enz. tot slechtste alternatief.

Opgave 1  Laat $F$ een voorkeurregel zijn, zoals hierboven beschreven. Toon aan dat als $F$ aan de condities van Pareto optimaliteit en IIA voldoet, dan is $F$ dictatoriaal.
(Aanwijzing: Ga na dat Stap 1 en Stap 2 hierboven geldig blijven, met dien verstande dat daar waar voorkeurrelaties van drie alternatieven opgesomd zijn, we nu rijtjes van $m$ alternatieven hebben.
Voor het bewijs van Stap 3 is het slechts nodig te bedenken dat we de ene voorkeurrelatie uit de andere kunnen maken door een aantal verwisselingen van direct op elkaar volgende alternatieven. Bijvoorbeeld voor vier alternatievn zouden we kunnen bedenken:

*abcd, bacd, bacd, bcda,*
*cbda, cbad, cabd, acbd,*

*acdb, cadb, cdab, cdba,*
*dcba, dcab, dacb, adcb,*
*adbc, dabc, dbac,dbca,*
*bdca, bdac, badc, abdc.*

Vervolgens kan Stap 4 gekopieerd worden om het bewijs te voltooien.)

Vanaf nu nemen we aan dat het aantal agenten $n \geq 2$. Laat $N$ de verzameling van agenten weergeven. Voor een deelverzameling $S$ van agenten definiëren het volgende. Laat $F$ een voorkeurregel zijn.

$S$ is quasi-beslissend (bij $F$) als $F(p) = R_1$ voor alle voorkeurrelaties $R_1$ en $R_2$ en alle profielen $p$ met:

$$p(i) = R_1 \text{ als } i \in S \text{ en}$$
$$p(i) = R_2 \text{ als } i \in N \backslash S.$$

$S$ is beslissend (bij $F$) als $F(p)=R$ voor alle voorkeurrelaties $R$ en alle profielen $p$ met $p(i) = R$.

Uit de definities volgt dat als $S$ beslissend is, dan is $S$ eveneens quasi-beslissend. $N$ is beslissend als $F$ Pareto optimaal is en als $\{i\}$ beslissend is voor een agent $i$, dan is $F$ dictatoriaal.

Merk op dat quasi-beslissend betekent dat $S$ beslist voor die gevallen waarbij de complementaire verzameling van $S$, $N \backslash S$ dus, unaniem is.

We tonen eerst aan dat voor Pareto optimale voorkeurregels die IIA zijn een quasi-beslissend deelverzameling van agenten beslissend is.

**Lemma 1** Laat $F$ een Pareto optimale voorkeurregel zijn die aan de IIA conditie voldoet. Laat $S$ een quasi-beslissende deelverzameling van agenten zijn. Dan is $S$ beslissend.

Bewijs van Lemma 1

Laat $x$ en $y$ twee alternatieven zijn en laat $p$ een profiel zijn zodanig dat alle agenten $i$ in $S$ alternatief $x$ boven alternatief $y$ verkiezen bij $p(i)$. Daar $F$ aan de conditie van IIA voldoet, is het voldoende te bewijzen dat $x$ collectief verkozen wordt boven $y$ bij $F(p)$. Beschouw hiertoe profiel $q$ en een derde alternatief $z$. Waarbij

$$xzy\ldots = q(i) \text{ voor } i \text{ in } S,$$
$$zyx\ldots = q(i) \text{ voor } i \text{ in } T_1,$$
$$zxy\ldots = q(i) \text{ voor i in } T_2,$$

en $T_1$ de deelverzameling van agenten $i$ in $N \backslash S$ is die $y$ boven $x$ verkiezen bij $p(i)$ en $T_2$ de deelverzameling van agenten $i$ in $N \backslash S$ is die $x$ boven $y$ verkiezen bij $p(i)$. Omdat $q|_{\{x,y\}} = p|_{\{x,y\}}$ volgt met IIA dat het voldoende is om te bewijzen dat $x$ collectief verkozen wordt boven $y$ bij $F(q)$. Daar $S$ een quasi-beslissende deelverzameling van agenten is, volgt met IIA dat $x$ collectief verkozen wordt boven $z$ bij $F(q)$. Pareto

optimaliteit impliceert, dat $z$ collectief verkozen wordt boven $y$ bij $F(q)$. Combineren we deze laatste twee dan volgt dat $x$ collectief verkozen wordt boven $y$ bij $F(q)$.
Einde bewijs Lemma 1

Opgave 2 Laat $F$ een Pareto optimale voorkeurregel zijn die aan de conditie van IIA voldoet. Bewijs dat $F$ alternatief beslissend is. Dit betekent dat voor elke deelverzameling $S$ van agenten

óf $S$ beslissend bij $F$,
óf $N \backslash S$ beslissend bij $F$.

(Aanwijzing: Neem een willekeurige deelverzameling van agenten, zeg $S$. Bedenk dat de logische afleidingen gedaan in Opgave 1 toepasbaar is op profielen $p$, waarbij er twee voorkeurrelaties zijn, zeg $R_1$ en $R_2$ zodanig dat

$p(i) = R_1$ als $i$ in $S$ is en
$p(i) = R_2$ als $i$ in $N \backslash S$ is.

Laat nu zien dat analoog aan Opgave 1 óf $S$ quasi-beslissend is bij $F$, óf $N \backslash S$ quasi-beslissend is bij $F$. Gebruik Lemma 1 om de opgave af te maken.)

**Stelling (Arrow)** ($n \geq 2$, $m \geq 3$) Zij $n \geq 2$ en $m \geq 3$. Laat $F$ een Pareto optimale voorkeurregel zijn die voldoet aan de IIA conditie. Dan is $F$ dictatoriaal.

**Bewijs** Voor gehele getallen $k \geq 2$ laat $P(k)$ de volgende bewering zijn:

Als $2 \leq n \leq k$, dan is elke Pareto optimale voorkeurregel die aan IIA voldoet dictatoriaal.

Met Opgave 1 hebben $P(2)$ bewezen. Het is derhalve voldoende om aan te tonen dat voor $k \geq 2$ bewering $P(k)$ bewering $P(k+1)$ impliceert. Neem daarom $P(k)$ aan en laat $n = k + 1$. Laat verder $F$ een Pareto optimale voorkeurregel zijn die aan de IIA conditie voldoet. Het is voldoende om aan te tonen dat $F$ dictatoriaal is. Beschouw $S = \{1,2,3,...,k\}$ de verzameling van de eerste $k$ agenten. Met Opgave 2 weten we dat óf $S$ beslissend is bij $F$, óf $\{k+1\}$ beslissend is bij $F$. We onderscheiden twee gevallen.

Geval 1 $\{k+1\}$ is beslissend bij $F$. Dan is $F$ dictatoriaal met dictator $k+1$ waarmee de stelling bewezen is voor dit geval.

Geval 2 $S$ is beslissend bij $F$. Zij $R$ een voorkeurrelatie. Beschouw $H$ de beperking van $F$ tot alle profielen $p$, waarbij $p(k+1) = R$. Dan is $H$ een voorkeurregel voor $k$ agenten. Verder volgt eenvoudig dat $H$ de IIA conditie van $F$ erft. Ook volgt daar $S$ beslissend is bij $F$, dat $H$ Pareto optimaal is. Dus $H$ is een Pareto optimale voorkeurregel voor $k$ agenten, die aan de IIA conditie voldoet. Met de onderstelling $P(k)$ volgt nu dat $H$ dictatoriaal is. Zeg met dictator $j$. We bewijzen nu dat $F$ dictatoriaal is met dictator $j$. Het is voldoende om aan te tonen dat $\{j\}$ beslissend is bij $F$. Beschouw hiertoe profiel $q$ welk als volgt vastgelegd is

$q(i) = R$ voor $i \in N \backslash \{j\}$ en

$$q(j) = -R.$$

Hierbij is $-R = \{(x,y):(y,x) \in R\}$ de voorkeurrelatie die volledig tegengesteld is aan $R$. Daar $H$ dictatoriaal in met dictator $j$ volgt $-R = q(j) = H(q) = F(q)$. Voorkeurregel $F$ is alternatief beslissend, dus volgt hiermee dat niet $N \backslash \{j\}$, maar $\{j\}$ beslissend is bij $F$. Hiermee is het bewijs voltooid.
Einde bewijs

In de voorgaande Stelling is Arrow's onmogelijkheidsstelling bewezen voor voorkeurregels waarbij de uitkomst een strikte ordening is van best naar slechtst. Zulke ordeningen noemt men ook wel lineaire ordeningen: de alternatieven zijn in een rijtje van goed naar slecht te zetten. We zullen tot slot laten zien dat het invoeren van indifferenties tot op zekere hoogte geen invloed heeft op het resultaat van Arrow. Hierbij betekent een indifferentie het gelijkwaardig vinden van alternatieven. Ten behoeve van de duidelijkheid leggen we een en ander formeel vast. We zeggen dat een voorkeurrelatie $R$ op $A$

1. transitief is indien voor alle alternatieven $x$, $y$ en $z$
$$(x,y) \in R \text{ en } (y,z) \in R \text{ impliceert } (x,z) \in R,$$
2. volledig is indien voor alle alternatieven $x$ en $y$
$$(x,y) \in R \text{ of } (y,x) \in R, \text{ en}$$
3. strikt is indien voor alle alternatieven $x$ en $y$
$$(x,y) \in R \text{ en } (y,x) \in R \text{ impliceert } x = y.$$

Een voorkeurrelatie heet een lineaire ordening als deze aan alle drie de voorwaarden voldoet en een zwakke ordening als deze aan de eerste twee voldoet. Vanwege onze afspraak is het duidelijk dat een lineaire ordening ook een zwakke ordening is.
Tot nog toe hebben we alleen lineaire ordeningen bekeken. Vanaf nu zullen we zwakke ordeningen toestaan en de volgende stelling bewijzen. We beschouwen voorkeurregels $F$ van de verzameling profielen over lineaire ordeningen naar de verzameling van zwakke ordeningen. In vergelijking met het voorgaande wordt de beeldverzameling uitgebreid tot de verzameling van zwakke ordeningen. Voor de volledigheid vermelden we dat de drie condities Pareto-optimaliteit, niet dictatorialiteit en de onafhankelijkheid van irrelevante alternatieven op voordehand liggende manieren aan te passen zijn voor deze nieuwe voorkeurregels. We bespreken nu de stelling van Arrow voor deze nieuwe voorkeurregels.

**Stelling (Arrow)** ($n \geq 2$, $m \geq 3$, zwakke ordeningen) Zij $n \geq 2$ en $m \geq 3$. Laat $F$ een Pareto optimale voorkeurregel van de profielen met lineaire ordeningen naar de verzameling van zwakke ordeningen zijn die voldoet aan de IIA conditie. Dan is $F$ dictatoriaal.

Het bewijs van deze stelling is verwerkt in de volgende opgave.

Opgave 3 Laat $F$ een Pareto optimale voorkeurregel zijn van de verzameling van profielen over lineaire ordeningen naar de verzameling van zwakke ordeningen. Laat $F$ aan de conditie van IIA voldoen. Laat $p$ een maximaal conflict zijn.

- Ga na dat het voldoende is om te bewijzen dat $F(p)$ strikt is.
- Laat $x$ met $y$ en $y$ met z direct opvolgende alternatieven zijn in $p(i)$. Bewijs nu dat $x$ met $y$ direct opvolgende alternatieven zijn in $F(p)$ of $x$ is indifferent aan $y$ in $F(p)$. Het is voldoende om te laten zien dat dit laatste niet mogelijk is. Stel dat $x$ indifferent aan $y$ in $F(p)$ zou zijn. Bedenk dat het maximale conflict uit twee soorten preferenties bestaat, welke plastisch als volgt weergeven kunnen worden:

  ...*xyz*---= $p(i)$ voor $i$ in $S$,

  ---*zyx*…= $p(j)$ voor $j$ in $N\backslash S$.

  Beschouw profiel $q$, waarbij alleen de voorkeurrelatie van de agenten $i$ in $S$ verandert in $q(i)$ = ..*xzy*---. Ga na, dat bij $F(q)$ alternatief $z$ strikt boven $y$ geprefereerd wordt. Zou $x$ indifferent zijn aan $y$ bij $F(p)$ dan volgt met IIA dat $x$ indifferent zou zijn aan $y$ bij $F(q)$. Daar $F(q)$ transitief is, zou hiermee volgen dat $z$ strikt boven $x$ verkozen worden bij $F(q)$. Met IIA volgt dan dat dit ook bij $F(p)$ het geval zou zijn. Dus zouden we dan bij $F(p)$ hebben dat

  $z$ strikt boven $x$ verkozen zou worden.

  Beschouw profiel $r$, waarbij alleen de voorkeurrelatie van de agenten $j$ in $N\backslash S$ verandert in $r(j)$ = ...*yzx*---. Uit de aanname dat $x$ indifferent aan $y$ bij $F(p)$ zou zijn, volgt nu analoog dat bij $F(p)$

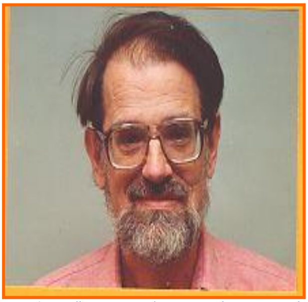
  $x$ strikt boven $z$ verkozen zou worden.

  Dus die indifferentie tussen $x$ en $y$ leidt tot tegenstrijdigheden en is niet houdbaar.

,

# 4 Inleiding Speltheorie III, Dynamische Spelen Frank Thuijsman

## Deel 3: Dynamische Spelen

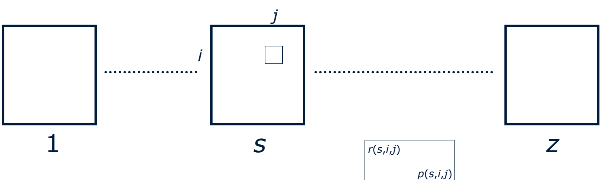


*Picture taken from* https://news.stonybrook.edu/awards-and-honors/shapley-nobel-prize-2/

Maastricht University

## Lloyd Shapley: Stochastische Spelen - 1953

Shapley, Lloyd S. "Stochastic games." *Proceedings of the national academy of sciences* 39.10 (1953): 1095-1100.




Shapley bekeek "**stoppende**" spelen,
in iets algemenere vorm dan het "**verdisconteren**" van de toekomst

Maastricht University

## Niet-verdisconteerde stochastische spelen

**Dean Gillette** - 1957:
Heeft dit spel een waarde?

**The Big Match**

Bob

| | | |
|---|---|---|
| Anna | **1** | **0** |
| | **0*** | **1*** |

Maastricht University

## Niet-verdisconteerde stochastische spelen

**David Blackwell** & **Tom Ferguson** - 1968:
De waarde van the Big Match is 0.5!

Bob

| | | |
|---|---|---|
| Anna | **1** | **0** |
| | **0*** | **1*** |

**Jean-Francois Mertens** & **Abraham Neyman** - 1981:
Elk tweepersoons stochastisch spel heeft een waarde!

**Let wel:** Optimale strategieën hoeven niet te bestaan, maar er bestaan altijd (historie-afhankelijke) $\varepsilon$-optimale strategieën.

Maastricht University

## Niet-verdisconteerde stochastische spelen

**Sylvain Sorin** - 1986:
Gat tussen verdisconteerde en niet-verdisconteerde evenwichten!

Bob

| | | |
|---|---|---|
| Anna | **1,0** | **0,1** |
| | **0,2*** | **1,0*** |

**FT** & **Koos Vrieze** - 1989:
Er bestaan $\varepsilon$-evenwichten in elk tweepersoons herhaald spel met absorbing toestanden!
Deel van promotieonderzoek, 1985-1989, onder begeleiding van **Koos Vrieze** & **Stef Tijs**

**Nicolas Vieille** - 2000:
Er bestaan $\varepsilon$-evenwichten in elk tweepersoons stochastisch spel

Maastricht University

## Uitnodigingen - 1989/1990

**Tom Ferguson**

**Abraham Neyman**

Maastricht University

*Pictures taken from* http://brand.ucla.edu/identity/logos-and-marks/seals *and* https://www.algemeiner.com/2013/03/05/hebrew-university-ranked-among-worlds-best-on-new-times-higher-education-list/

## Uitnodigingen - 1989/1990

**Tom Ferguson**
**Lloyd Shapley**

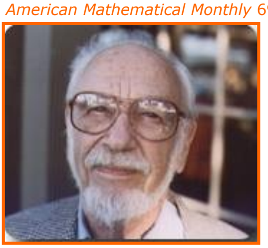
**Abraham Neyma**

Maastricht University

https://www.algemeiner.com/2013/03/05/hebrew-university-ranked-among-worlds-best-on-new-times-higher-education-list/

## Huwelijksproblemen

College admissions and the stability of marriage,
*American Mathematical Monthly* 69, 1962



David Gale

Lloyd S. Shapley

Maastricht University

## Huwelijksproblemen

Maastricht University

## Huwelijksproblemen

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Anny | Freddy | Harry | Kenny | Gerry | Lenny |
| Betty | Gerry | Kenny | Freddy | Harry | Lenny |
| Conny | Lenny | Harry | Gerry | Freddy | Kenny |
| Dolly | Harry | Lenny | Freddy | Gerry | Kenny |
| Emmy | Harry | Kenny | Gerry | Lenny | Freddy |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Freddy | Conny | Betty | Anny | Emmy | Dolly |
| Gerry | Dolly | Anny | Betty | Emmy | Conny |
| Harry | Emmy | Anny | Dolly | Betty | Conny |
| Kenny | Emmy | Conny | Anny | Dolly | Betty |
| Lenny | Emmy | Anny | Betty | Conny | Dolly |

Maastricht University

## Huwelijksproblemen

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Anny | Freddy | | Kenny | Gerry | Lenny |
| Betty | Gerry | Kenny | Freddy | | Lenny |
| Conny | Lenny | | Gerry | Freddy | Kenny |
| Dolly | | Lenny | ~~Freddy~~ | Gerry | Kenny |
| | | Kenny | Gerry | Lenny | Freddy |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Freddy | Conny | Betty | Anny | | ~~Dolly~~ |
| Gerry | Dolly | Anny | Betty | | Conny |
| | | Anny | Dolly | Betty | Conny |
| Kenny | | Conny | Anny | Dolly | Betty |
| Lenny | | Anny | Betty | Conny | Dolly |

Maastricht University

## Huwelijksproblemen

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Anny | Freddy 1 | Harry | Kenny | Gerry | Lenny |
| Betty | Gerry 2 | Kenny 9 | Freddy | Harry | Lenny |
| Conny | Lenny 3 | Harry | Gerry | Freddy | Kenny |
| Dolly | Harry 4 | Lenny 6 | Freddy 7 | Gerry 8 | Kenny |
| Emmy | Harry 5 | Kenny | Gerry | Lenny | Freddy |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Freddy | Conny | Betty | Anny 1 | Emmy | Dolly 7 |
| Gerry | Dolly 8 | Anny | Betty 2 | Emmy | Conny |
| Harry | Emmy 5 | Anny | Dolly 4 | Betty | Conny |
| Kenny | Emmy | Conny | Anny | Dolly | Betty 9 |
| Lenny | Emmy | Anny | Betty | Conny 3 | Dolly 6 |

Maastricht University

## Huwelijksproblemen

- Methode werkt ook bij groepen van ongelijke grootte
- Eenvoudig aan te passen wanneer sommige combinaties niet wenselijk zijn.

Maastricht University

## Lloyd Shapley - 2012

College Admissions and the Stability of Marriage
Author(s): D. Gale and L. S. Shapley
Source: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1 (Jan., 1962), pp. 9-15

*Picture taken from* https://phys.org/news/2016-03-nobel-laureate-economics-lloyd-shapley.html

Maastricht University

## Uitnodigingen - 1989/1990

**Tom Ferguson**
**Lloyd Shapley**

**Abraham Neyman**
**Avi Shmida**
**Reinhard Selten, Robert Aumann**
**Nobel prizes, 1994, 2005**

*Pictures taken from* http://brand.ucla.edu/identity/logos-and-marks/seals *and* https://www.algemeiner.com/2013/03/05/hebrew-university-ranked-among-worlds-best-on-new-times-higher-education-list/

Maastricht University

## Avi Shmida - 1990: biologie en speltheorie

Maastricht University

## Avi Shmida - 1990: biologie en speltheorie

ELSEVIER

Journal of Theoretical Biology
Volume 175, Issue 3, 7 August 1995, Pages 305-316

Regular article

Automata, matching and foraging behavior of bees

Thuijsman, F. [a], Peleg, B. [b], Amitai, M. [b], Shmida, A. [c]

*Screenshot taken from* https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519385701440

Maastricht University

## Evolutionaire speltheorie

**John Maynard Smith** - 1974
**ESS**: **E**volutionair **S**tabiele **S**trategie

| | Type 1 | Type 2 |
|---|---|---|
| Type 1 | 1,1 | 0,4 |
| Type 2 | 4,0 | 2,2 |

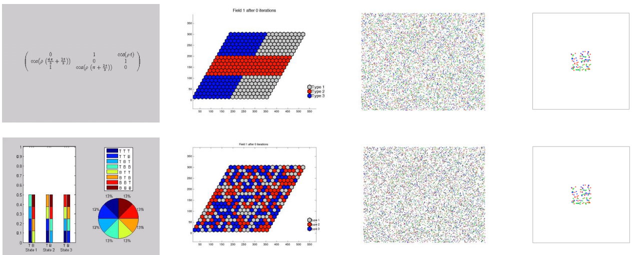
**Peter Taylor** & **Leo Jonker** – 1978
de replicator dynamiek

$$\dot{x_i} = x_i \left((Ax)_i - x^T Ax\right)$$

de replicator dynamiek

Maastricht University

## Evolutionaire Dynamiek



*Prepared by master and PhD students Philippe Uyttendaele, Mandy Tak, Katharina Schüller and Li You*

Maastricht University

## Lopend onderzoek m.b.t. kanker

Journal of Theoretical Biology 435 (2017) 78–97

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Theoretical Biology

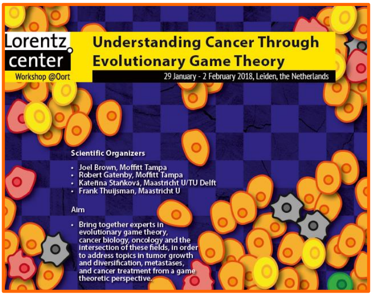
journal homepage: www.elsevier.com/locate/jtbi

Spatial vs. non-spatial eco-evolutionary dynamics in a tumor growth model

Li You[a], Joel S. Brown[c,d], Frank Thuijsman[a], Jessica J. Cunningham[d], Robert A. Gatenby[d,e], Jingsong Zhang[f], Kateřina Staňková[a,b,*]

Maastricht University

## Lopend onderzoek m.b.t. kanker




Maastricht University

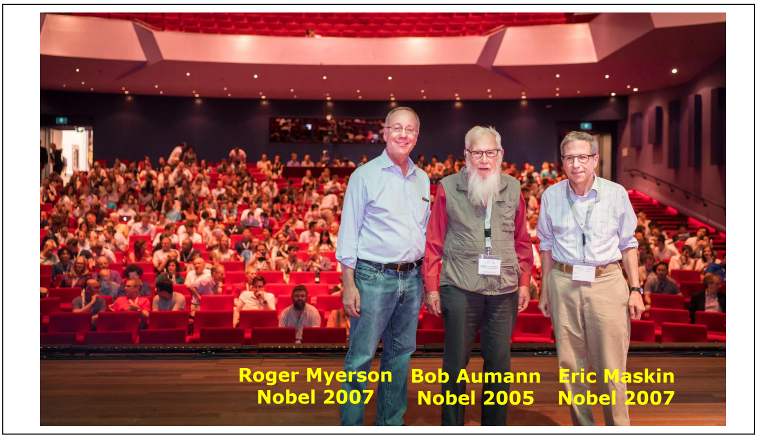
## Ander lopend onderzoek

- Rond modellen van voortplantingsvormen bij planten
- Rond modellen van dynamische stabiliteit in leerprocessen
- Rond modellen van locale en globale sturing in bijvoorbeeld klimaatvervuiling en visserij
- Soms nog onderzoek naar existentie van evenwichten in stochastische spelen voor 3 of meer spelers (nog altijd open)

Maastricht University


Maastricht University


GAMES 2016
Frank Thuijsman

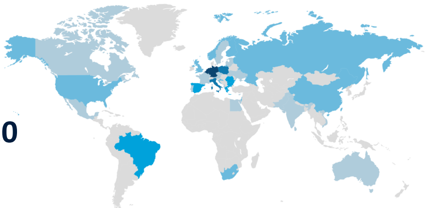

Roger Myerson
Nobel 2007
Bob Aumann
Nobel 2005
Eric Maskin
Nobel 2007

## Ter afsluiting


Maastricht University

## Ter afsluiting

**2014-2020**



**101** students

**82%** non-Dutch

**22%** non-EU

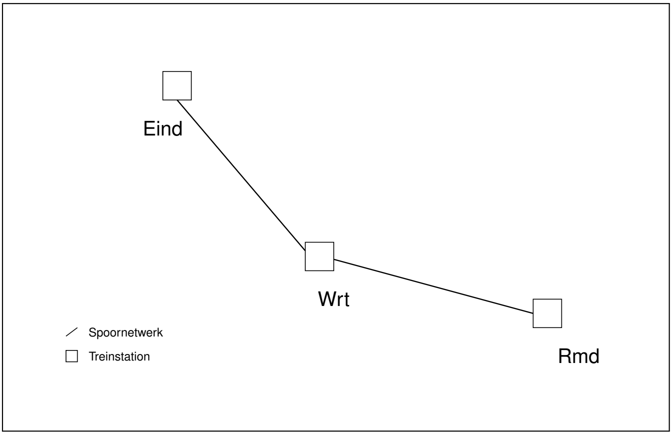
Maastricht University

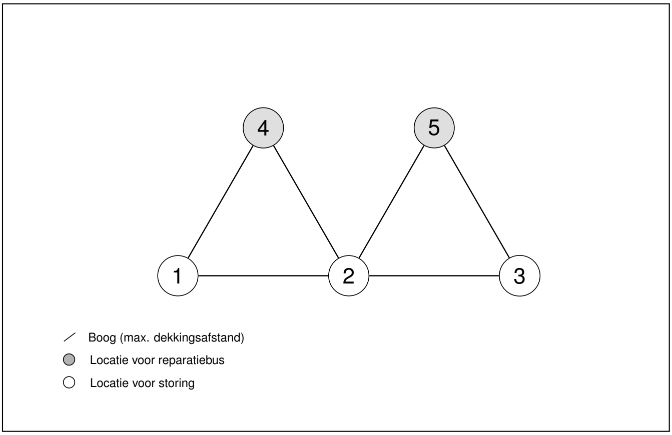
# 5 Toepassingen van de Speltheorie
Loe Schlicher

**Doel van de presentatie**

- benoemen van een aantal toepassingsgebieden
- bespreken van een aantal speltheoretische modellen
- handvaten meegeven voor middelbaar onderwijs

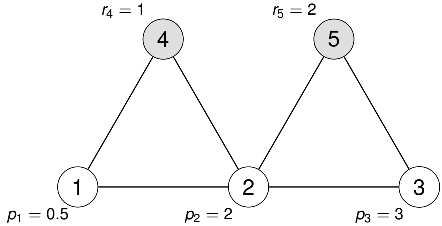
Toepassing 1: Logistieke sector



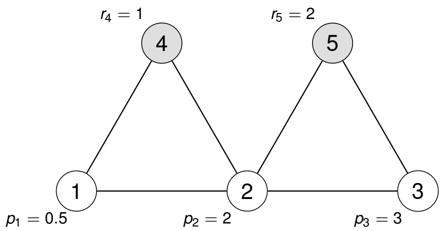

**Tabel:** Kosten per coalitie

| $M$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c(M)$ | | | | | | | |



**Tabel:** Kosten per coalitie

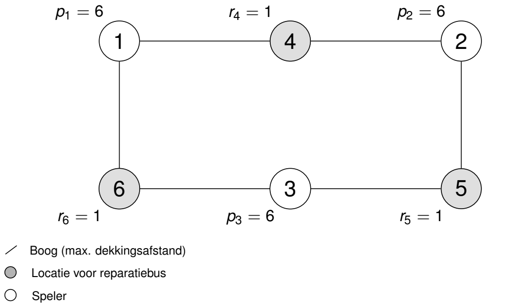
| $M$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c($M$) | 0.5 | 1 | 2 | 1 | 2.5 | 2 | 2.5 |
| | 0.5 | 0.5 | 1.5 | | | | |




Is de core altijd niet-leeg?

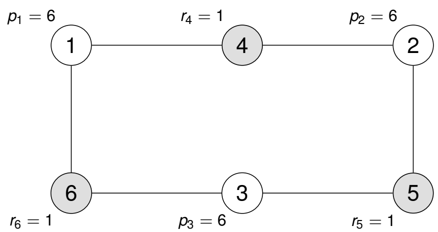
**Stelling**

De core is niet-leeg dan en slechts dan als er geen integraliteitsgat is voor de grote coalitie



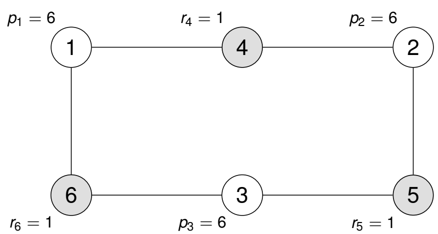

**Tabel:** Kosten per coalitie

| $M$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c(M)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |




**Tabel:** Kosten per coalitie

| $M$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c(M)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |



Hoe ziet de core eruit?

## Beschrijving van de core

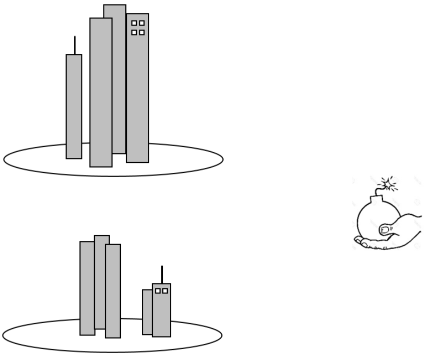
De core wordt precies beschreven door:

- **Efficiëntie** : alle kosten worden verdeeld
- **Niet-negativiteit**: niemand krijgt geld
- **Boete-restrictie**: niemand betaalt meer dan zijn eigen boete
- **Reparatiebus-restrictie**: de totale kosten voor alle spelers, binnen de maximale radius van een geplaatste reparatiebus, zijn hoogstens de kosten van het plaatsen van zo'n reparatiebus

## Inzichten

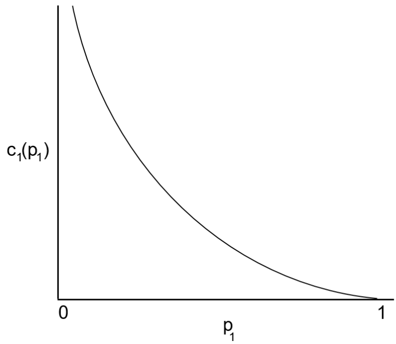
- Samenwerken kan veel kosten besparen
- Het is niet altijd mogelijk om een eerlijke kostenverdeling te vinden
- De core wordt opgespannen door 4 intuïtieve eigenschappen

Toepassing 2: terrorismebestrijding



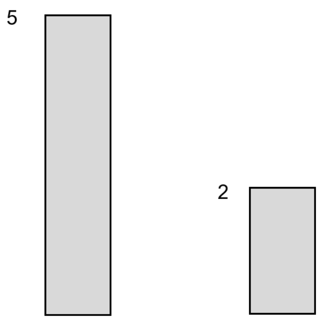
**Notatie**

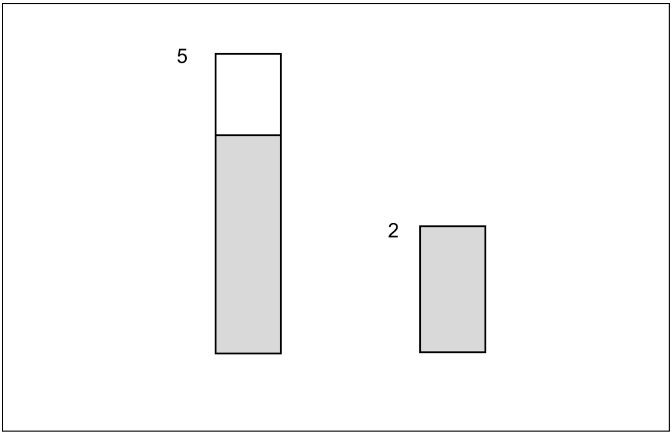
| | |
|---|---|
| $B$ | verdedigingsbudget |
| $p_1$ | kans op succesvolle aanslag stad 1 |
| $p_2$ | kans op succesvolle aanslag stad 2 |
| $c_1(p_1)$ | verdedigingskosten voor kans $p_1$ in stad 1 |
| $c_2(p_2)$ | verdedigingskosten voor kans $p_2$ in stad 2 |

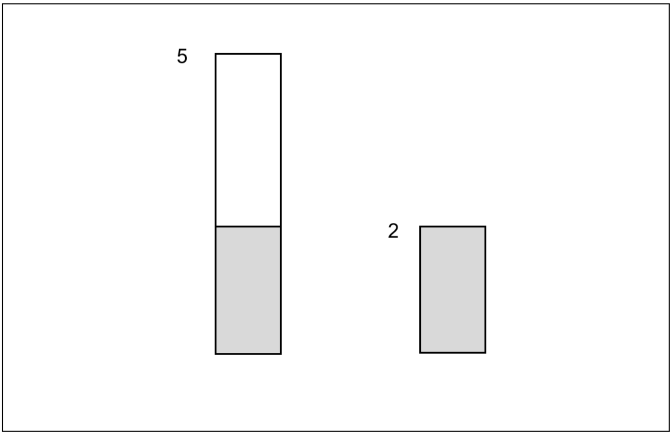


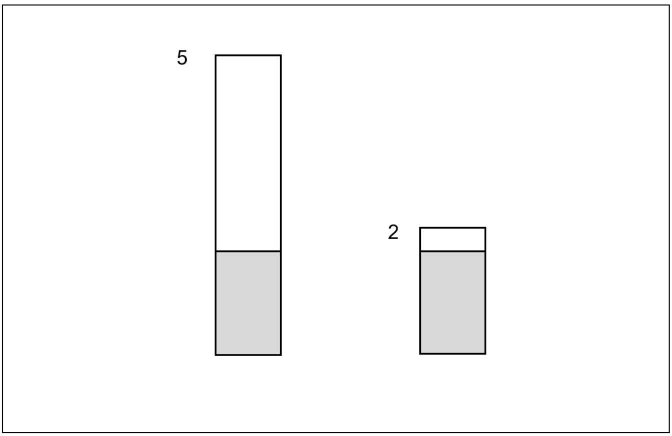

**Observatie van de terrorist**

$$\frac{v1}{v2} > \frac{p2}{p1} \Rightarrow \text{ val stad 1 aan}$$

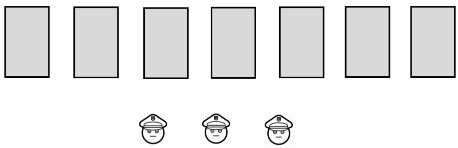


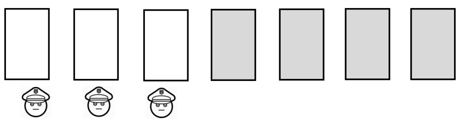

5
2


5
2


5
2

Wat als we ons budget niet *vrij* kunnen inzetten (bijv. als we *geheeltallige* hulpmiddelen moeten inzetten)?

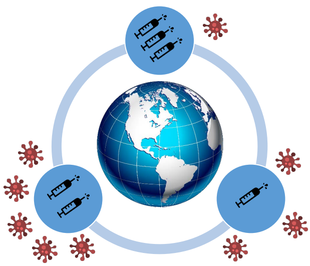


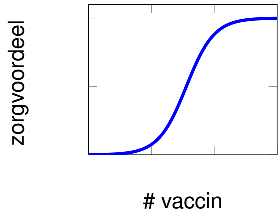


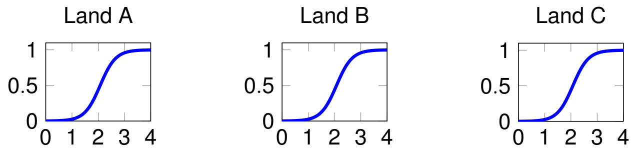
## Inzichten

- Bekendmaken van beschermingsmaatregelen is een delicate zaak (hangt af van vrije/geheeltallige inzet)
- Bescherm niet altijd alle locaties

Toepassing 3: Zorgsector

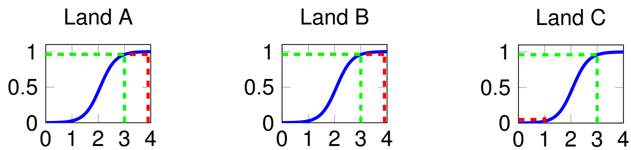





**Tabel:** Opbrengsten per coalitie

| $M$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v($M$) | 1 | 1 | 0.1 | 2 | 1.6 | 1.6 | 2.8 |



$$x_i = \overbrace{F_i(v_i^*)}^{\text{zorgvoordeel}} + \overbrace{p(r_i - v_i^*)}^{\text{handelprijs vaccin}}$$

**Niet-leegheid van de core**

- Marktallocatie $x$ behoort vaak tot de core met $p$ de gemiddelde opbrengstprijs
- de core is niet-leeg zolang er vrij weinig of vrij veel vaccins zijn (maar wellicht niet goed verdeeld)
- in de overige gevallen bestaat er bijna altijd wel een speler die protesteert (d.w.z., de core is leeg)

**Inzichten**

- Samenwerken kan veel zorgvoordeel opleveren
- Vind juiste *partners*, anders kan de verdeling van kosten/opbrengsten een issue opleveren
- indien samenwerking mogelijk is, gebruik marktprijs

## Voor wie is PWN interessant?

Beroepswiskundigen

Wiskundeleraren

Bedrijven

Leerlingen en studenten

Breed publiek

Platform Wiskunde Nederland is hét landelijke loket voor alles wat met wiskunde te maken heeft.

PWN behartigt de belangen van, en fungeert als spreekbuis voor, de gehele Nederlandse wiskunde.

Platform Wiskunde Nederland | Science Park 123 | kamer L013 | 1098 XG Amsterdam | 020 592 40 06

Ga voor meer informatie naar:
www.platformwiskunde.nl

platform wiskunde nederland